IRM | institut du risk management

## Certificat d'Expertise Actuarielle

## Epreuve écrite de sélection -– 12 octobre 2020

Aucun document autorisé - Calculatrice simple disponible

Les consignes indiquées ci-dessous sont suffisamment explicites pour ne pas laisser de doute quant à leur interprétation. Les personnes surveillant l'examen ne répondront à aucune question relative à ces consignes durant l'épreuve, la bonne compréhension de ces règles faisant elle aussi partie de l'examen.

Cet examen est un questionnaire à choix multiples constitué de 50 questions. Plusieurs réponses sont proposées pour chaque question (ou ensemble de questions). Le nombre de bonnes réponses à une question peut aller de 0 à 5.

Les réponses sont à inscrire sur la feuille jointe, en cochant pour chaque question la (ou les) case(s) correspondant à la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

# ECONOMETRIE

Régression linéaire. La variable à expliquer Y est la variable « salary ». Le nom des autres variables est précisé dans la première colonne du tableau de sortie. Le modèle s'écrit :

$$Y = \alpha + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i + \varepsilon, \text{ où } E[\varepsilon | X_1, \dots, X_k] = 0.$$

Sortie du logiciel :

| Coefficients | Estimate | Std. Error | t | Pr(>\|t\|) | |
|---|---|---|---|---|---|
| (Intercept) | -1.255e+04 | 3.475e+03 | -3.612 | 0.000337 | *** |
| salbegin | 1.723e+00 | 6.051e-02 | 28.472 | < 2e-16 | *** |
| jobtime | 1.545e+02 | 3.408e+01 | 4.534 | 7.37e-06 | *** |
| prevexp | -1.944e+01 | 3.583e+00 | -5.424 | 9.36e-08 | *** |
| duc | 5.930e+02 | 1.666e+02 | 3.559 | 0.000410 | *** |
| sexF | -2.233e+03 | 7.921e+02 | -2.819 | 0.005021 | ** |

Residual standard error: 7410 on 468 degrees of freedom Multiple R-squared: 0.8137, Adjusted R-squared: 0.8117 F-statistic: 408.7 on 5 and 468 DF, p-value: < 2.2e-16

**Q 1 - La valeur de k est :**

a) 6
b) 5

**Le nombre d'observations est :**

c) 474
d) 473
e) 468

**Q2 - Parmi les variables suivantes, lesquelles sont significatives au niveau 0,005 ?**

a) Intercept
b) salbegin
c) sexF
d) jobtime
e) prevepx

**Q 3 - La valeur du R^2 est :**

a) 7410
b) 408.7
c) 0.8137
d) 0.8117
e) 2.2e-16

**Q4 - Dans le cadre d'une méthode de sélection « backward », la première variable à être retirée est :**

a) salbegin
b) sexF
c) jobtime
d) intercept
e) prevexp

**Q 5 - On note $\boldsymbol{\beta_k}$ le coefficient correspondant à la variable sexF. On souhaite tester :**

$$H_0 : \beta_k = 0$$

**contre**

$$H_0 : \beta_k > 0.$$

**Au niveau 0,002, on :**

a) rejette $H_0$
b) ne rejette pas $H_0$

**Au niveau 0,05 on :**

c) rejette $H_0$
d) ne rejette pas $H_0$

**Q 6 - On note $\boldsymbol{\beta_k}$ le coefficient correspondant à la variable sexF. On souhaite tester :**

$$H_0 : \beta_k = 0$$

**contre**

$$H_0 : \beta_k < 0.$$

**Au niveau 0,002, on :**

a) rejette $H_0$
b) ne rejette pas $H_0$
c) Au niveau 0,05 on
d) c) rejette $H_0$
e) d) ne rejette pas $H_0$

SAS au capital de 96 550 euros - Déclaration d'activité enregistrée sous le n° 11 75 44451 75 auprès du Préfet de Région IDF
4, rue Chauveau-Lagarde - 75008 Paris - Tél : 01 44 51 72 79 - Fax : 01 44 51 72 73
Email : formation@institutdesactuaires.fr
Siret : 512 264 441 000 19 - Code NAF : 8559 A - TVA intracommunautaire : FR 25 512264441 - RCS Paris : 512 264 441

**Q 7- Sur les mêmes données, la variable salbegin est remplacée par son logarithme. On ajuste un nouveau modèle de régression linéaire, et on trouve un R^2 de 0.8317. On appelle ce modèle « modèle 2 », et le précédent « modèle 1 ». En considérant cette nouvelle valeur du R^2 on :**

a) peut considérer que le modèle 1 est préférable au modèle 2
b) peut considérer que le modèle 2 est préférable au modèle 2
c) peut considérer que les deux modèles sont équivalents
d) peut considérer que le modèle n'est pas linéaire
e) n'a pas suffisamment d'éléments pour conclure sur aucun de ces points.

**Q 8 - Parmi les phrases suivantes, lesquelles sont vraies ?**

a) Les critères de sélection de modèles AIC et BIC pénalisent les modèles nécessitant beaucoup de paramètres.
b) La méthode de sélection de modèle « backward » permet de déterminer le modèle le plus adapté aux données.
c) La méthode de sélection de modèle « backward » permet de déterminer le modèle le plus adapté aux données si on compare les AIC et BIC de tous les sous-modèles considérés dans cet algorithme de sélection.
d) La méthode de pénalisation Lasso permet de sélectionner des variables sans avoir à considérer tous les sous-modèles possibles basés sur l'ensemble des variables.
e) La méthode de pénalisation Ridge permet de sélectionner des variables sans avoir à considérer tous les sous-modèles possibles basés sur l'ensemble des variables.

**Q 9 - On considère un modèle linéaire généralisé où :**
- **la variable à expliquer Y est supposée suivre une loi de Poisson (conditionnellement aux variables explicatives).**
- **la fonction de lien est le log, i.e. $log(E[Y|X]) = \alpha + \beta X$ (la variable X est de dimension 1).**

**Y représente la prime que doit payer l'assurer. La variable X est une variable quantitative. On considère un individu de caractéristique $x$. Au bout d'un an, sa caractéristique $x$ est modifiée et devient $x + \delta$. Sa prime évolue de $\pi_0$ à $\pi_1$ où :**

a) $\pi_1/\pi_0 = exp(\beta\delta)$
b) $\pi_1 - \pi_0 = exp(\beta\delta)$
c) $\pi_1 - \pi_0 = \beta\delta$
d) $\pi_1 - \pi_0 = log(\beta\delta)$
e) $\pi_1/\pi_0 = log(\beta\delta)$

**Q 10 - On suppose que, pour notre assuré de caractéristiques $x$,la prime pure est de 2 euros (les sinistres sont de coût unitaire). La probabilité que cet individu ait au moins un sinistre dans l'année est :**

a) $exp(2)$
b) $exp(-2)$
c) $1 - exp(2)$
d) $1 - exp(-2)$
e) $2exp(-2)$

**Q 11- On dispose d'un historique $(X_1, \dots X_n)$ des défauts de paiement d'un client au cours des n périodes de temps précédente. On suppose que, conditionnellement à une variable inobservée $\theta_0$, les $X_i$ sont indépendants, identiquement distribués de loi de Bernoulli de paramètre $\theta_0$.Ce facteur de risque inobservé suit une loi a priori Bêta de paramètre $(a, 2)$, c'est-à-dire de densité $f_a(\theta) = \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)} \theta^{a-1}(1-\theta)1_{\theta\in[0,1]}$.**
**Il n'est pas nécessaire de connaître la définition (ni la valeur) de la fonction $\Gamma$ pour répondre aux questions suivantes. On rappelle que l'espérance de cette loi Bêta de paramètre $(a, 2)$ est $\frac{a}{a+2}$.**
**L'espérance des $X_i$ vaut :**

a) $\theta_0$

b) $\frac{a}{a+2}$

c) $\frac{a+2}{a}$

d) $1/\theta_0$

e) $a+2$

**Q12 - On suppose que chaque défaut de paiement a un coût 1 euro. Si on assure ce client contre le défaut de paiement, la prime bayésienne vaut : (en notant $S =$nombre total de défauts sur les n périodes)**

a) $S$

b) $\frac{S+a}{n+a+2}$

c) $\frac{S}{n} + \frac{a}{a+2}$

d) $a+2$

e) $\frac{S}{n} - \frac{a}{a+2}$

**Q 13 - Sur l'ensemble du portefeuille, on constate que le nombre moyen de défaut sur une période de temps est 0,2. Quelle valeur du paramètre a de la loi a priori vous semble adapté à refléter cette réalité ?**

a) 0,2
b) 1,5
c) 0,5
d) 0,4
e) 1

**Q 14 - Lorsque le nombre d'années d'historique tend vers l'infini,**

a) la prime bayésienne s'approche de $a$
b) b) la prime bayésienne s'approche de $a/a + 2$
c) c)la prime bayésienne s'approche de $S/n$
d) d)la prime bayésienne s'approche de $0$
e) e) la prime bayésienne s'approche de $S$

# Mathématiques financières de base pour l'actuariat

Pour les 13 questions suivantes, on adopte la convention de taux annuel, les intérêts étant payés en fin de période. Les annuités des crédits sont payées en fin de période.

**Q15 Un particulier fait 5 placements annuels (versés en début de période) de 5 000 euros au taux de 1%. Quelle est la valeur de son placement à la fin de la 5ème année ?**

A) 25 760 euros
B) 25 505 euros
C) 25 252 euros
D) 30760 euros

**Q16 Quelle est l'annuité d'un crédit de 100 000 euros d'une durée de 20 ans au taux de 2%?**

A) 5 000 euros
B) 5 878 euros
C) 6 116 euros

**Le coût du crédit est**

E) 17 560 euros
F) 22 313 euros

**Q17 Un prêt de 15 000 euros sur 3 ans a des annuités constantes de 5 176 euros.**
**Le taux du prêt est de**

A) 1.25 %
B) 1.75 %
C) 2.5 %

**Le capital restant dû après la 2ème annuité est de**

D) ** 5087 euros
E) 5 062 euros

**Q18 Soit un crédit de 10 000 euros d'une durée de 3 ans au taux de 1.75 %. La première annuité est de 3 000 euros. La seconde annuité est de 4 000 euros. Quel est le montant de la troisième annuité ?**

A) 3 306, euros
B) 3 333 euros
C) 3 358 euros

**Le montant total des intérêts est de**

D) 306 euros
E) 358 euros

**Q19 Quel est le montant d'un crédit d'une durée de 5 ans dont 2 ans de différé de remboursement, sachant que le taux est de 2% et que l'annuité est 9 019 euros?**
A) 25 000 euros
B) 33 668 euros
C) 42 500 euros

**Le coût du crédit est :**
D) 2 057euros
E) 2 595 euros

**Q20 Soit un crédit à amortissement constant de 50 000 euros sur 10 ans au taux de 1 %. Quel est le montant de la 4ème annuité ?**
A) 5 279 euros
B) 5 350 euros
C) 5 400 euros

**L'intérêt payé sur ces 4 années est de**
D) 1 700 euros
E) 2 000 euros

**Q21 Quel est le coût d'un crédit à amortissement in fine de 2 000 euros sur 2 ans, sachant que le taux est de 2 %?**
A) 80 euros
B) 80.8 euros
C) 92 euros

**Q22 Quelle est la valeur actuelle d'une obligation zéro-coupon de maturité 5 ans de nominal 100 sachant que le taux de rendement est de - 0.5 %?**
A) 97.53 euros
B) 98.02 euros
C) 102.54 euros

**Sa duration est**
D) 4.92
E) 5

**Q23 Quel est le taux de rendement à maturité d'une obligation 2 ans de nominal 100 qui paie un coupon de 2 et qui cote 101.97?**
A) -0,5%
B) 0,5%
C) 1%

**Sa duration est**
D) 1.98
E) 2

**Q24 On considère une combinaison d'un crédit classique de 30 000 euros à taux 3% d'une durée de 5 ans, et d'un prêt à taux zéro d'une durée de 5 ans avec différé d'un an et d'un montant de 10 000 euros.L'annuité du prêt lissé correspondant est**

A) 8 521 euros

B) 8 551 euros

C) 9051 euros

**Le surcoût du prêt lissé est de**

D) 150 euros

E) -150 euros

**Q25 Quelle est la valeur actuelle de l'obligation zéro-coupon de nominal 1 et de maturité 5 ans, sachant que le prix à terme d'échéance 5 ans d'une action (sans dividende ni repo) qui cote 40 aujourd'hui est de 38?**

A) 0.95 euros

B) 0.975 euros

C) 1.053 euros

**Q26 On considère un modèle binomial à une période, de taux sans risque $r= 0.15$, caractérisé par le coefficient de hausse $u=1.2$, et de baisse $d=0.9$, ($S_1=u S_0$ en cas de hausse, et $S_1=d S_0$ en cas de baisse). $S_0=20$.**

**La probabilité risque neutre est caractérisée par une probabilité de hausse de :**

A) 1/6

B) 5/6

C) Il n'existe pas de probabilité risque neutre

**Le prix du call de strike K=20 est**

D) 2.9 euros

E) 3.48 euros

**Q27 On note $S_0$ la valeur d'un actif (sans dividende ni repo), $C(T,K)$ (respectivement $P(T,K)$) la valeur du Call (resp. du Put) européen de maturité T et strike K , $B(0,T)$ la valeur d'une obligation zéro-coupon de nominal 1 et de maturité T. Laquelle de ces (in)égalités conduit à un arbitrage?**

A) $P(T,K) =C(T,K)-S_0 + K$

B) $C(T,K) >= (S_0 -K B(0,T))^+$

C) Si $K_2>K_1$, $C(T,K_2)-C(T,K_1) >= - (K_2-K_1) B(0,T)$

# Statistique et analyse de données

**Q28 Le modèle associé à un ensemble de variables aléatoire $X_1, X_2, \dots, X_n$ est défini par**

A) la loi de chacune des variables aléatoires

B) la loi jointe du n-uplet $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

C) le produit des lois de $X_1, X_2, \dots, X_n$

**Lorsque que les variables sont i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées), pour connaître la loi du modèle, il suffit de connaître**

D) la loi de $X_1$

E) la somme des lois de $X_1, X_2, \dots, X_n$

**Q29 Un modèle exponentiel est un modèle**

A) dont les variables suivent des lois exponentielles

B) dont les exponentielles des variables suivent des lois normales

C) dont la loi s'écrit sous une forme particulière, avec une fonction exponentielle mélangeant observations et paramètres

**Estimer les paramètres d'un modèle exponentiel est possible car**

D) l'estimateur du maximum de vraisemblance existe et est unique

E) le modèle est paramétré par son espérance et sa variance

**Q30 L'estimateur du maximum de vraisemblance utilise la vraisemblance, qui est**

A) la probabilité de réalisation du modèle

B) le degré de qualité de l'estimation

C) la loi jointe du modèle

D) la loi jointe du modèle, considérée comme une fonction des paramètres

E) l'écart entre la loi du modèle et une loi normale

**Q31 On observe les notes de $n$=49 élèves, notes supposées suivre une loi normale, et on mesure une moyenne de $m$=12 et une variance empirique de $s^2$=16. Le rectorat souhaiterait que la note moyenne de la classe soit, avec probabilité 95%, comprise entre 11 et 13. On rappelle que le quantile 0,975 d'une loi normale est 1,96, et celui d'une loi de Student à 50 degrés de liberté est 2,009 (la loi de Student n'est pas tabulée de 1 en 1 pour les grandes valeurs).**

**L'intervalle de confiance à 95% est :**

A) [10,85 ; 13,15]

B) [10,88 ; 13,12]

C) [12,16 ; 12,17]

SAS au capital de 96 550 euros - Déclaration d'activité enregistrée sous le n° 11 75 44451 75 auprès du Préfet de Région IDF
4, rue Chauveau-Lagarde - 75008 Paris - Tél : 01 44 51 72 79 - Fax : 01 44 51 72 73
Email : formation@institutdesactuaires.fr
Siret : 512 264 441 000 19 - Code NAF : 8559 A - TVA intracommunautaire : FR 25 512264441 - RCS Paris : 512 264 441

**Q32 Considérer un intervalle de confiance à 90% plutôt que 95%**
A) a pour effet d'augmenter la taille de l'intervalle
B) a pour effet de diminuer la taille de l'intervalle
C) ne change pas la taille de l'intervalle mais nécessite un échantillon plus grand
D) ne change pas la taille de l'intervalle mais nécessite un échantillon plus petit
E) ne change pas la taille de l'intervalle mais nécessite une estimation plus précise du paramètre

**Q33 Un test de niveau $\alpha$ est un test**
A) dont la puissance est supérieure à $\alpha$
B) dont l'erreur de première espèce est inférieure à $\alpha$ quelle que soit l'erreur de seconde espèce
C) dont l'erreur de deuxième espèce est inférieure à $\alpha$, quelle que soit l'erreur de première espèce
D) dont l'erreur de première espèce et l'erreur de seconde espèce sont inférieures à $\alpha$
E) dont la somme des erreurs de première espèce et de seconde espèce est inférieure à $\alpha$.

**Q34 Un test est entièrement déterminé par sa région critique, qui est**
A) l'ensemble des valeurs conduisant à rejeter $H_0$ lorsque $H_0$ est fausse
B) l'ensemble des valeurs conduisant à rejeter $H_1$ lorsque $H_1$ est fausse
C) l'ensemble des valeurs conduisant à rejeter $H_1$ lorsque $H_0$ est fausse
D) l'ensemble des valeurs conduisant à rejeter $H_0$ lorsque $H_1$ est fausse
E) l'ensemble des valeurs pour lequel le test est indéterminé (même probabilité de rejeter $H_0$ et $H_1$)

**Q35 L'analyse factorielle des correspondances (ACP) d'un nuage de points décrits par des variables quantitatives consiste à**
A) déterminer des correspondances entre les variables du modèle
B) déterminer des axes d'inertie du nuage et projeter sur ces axes
C) déterminer les facteurs expliquant les variables

**C'est une méthode**

D) paramétrique
E) descriptive

**Q36 L'ACP produit des valeurs propres et des vecteurs propres. Ce sont**
A) les variances des variables, et les covariances
B) les moyennes des composantes principales, et leurs variances
C) l'inertie expliquée par les axes de dispersion maximale du nuage, et les vecteurs directeurs de ces axes
D) l'inertie expliquée par les axes de dispersion maximale du nuage, et les composantes principales associées
E) les axes d'inertie du nuage et leurs corrélations

**Q37 En ACP, on effectue une deuxième analyse, celle du nuage des variables, et il existe des correspondances entre analyse du nuage des individus et analyse du nuage des variables :**

A) les deux nuages ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres
B) les valeurs propres d'un nuage sont les vecteurs propres de l'autre, et réciproquement
C) les valeurs propres sont identiques, et les vecteurs propres sont identiques à une rotation près
D) les valeurs propres d'un nuage sont les facteurs de l'autre, et réciproquement, avec les mêmes vecteurs propres
E) les valeurs propres sont identiques, et les vecteurs propres de l'un sont proportionnels aux facteurs de l'autre (et réciproquement)

**Q38 Une analyse factorielle des correspondances (AFC) permet d'analyser une population décrite par deux variables qualitatives *X* et *Y*. On construit les profils des lignes et les profils des colonnes qui correspondent à des lois empiriques de probabilité. Une modalité $X_i$ de la variable *X* est caractérisée par**

A) la loi de $Y$ conditionnellement à $X$=$X_i$
B) la loi de $X$=$X_i$ conditionnellement à $Y$

**Une telle construction se prête à une ACP car**

C) plus les variables *X* et *Y* sont corrélées, moins les profils-lignes sont similaires et moins les profils-colonnes sont similaires
D) plus les variables *X* et *Y* sont corrélées, moins les profils-lignes sont similaires et moins les profils-colonnes sont différents
E) plus les variables *X* et *Y* sont corrélées, moins les profils-lignes sont similaires aux profils-colonnes

**Q39 En classification, une méthode de partitionnement est généralement un algorithme qui à chaque étape**

A) diminue l'inertie interclasse et augmente l'inertie intraclasse
B) augmente l'inertie interclasse et diminue l'inertie intraclasse
C) augmente l'inertie interclasse et l'inertie intraclasse
D) augmente l'inertie du nuage et l'inertie interclasse
E) diminue l'inertie du nuage et l'inertie interclasse

**Q40 Combiner ACP et CAH permet**

A) de mieux visualiser les résultats de la classification
B) d'obtenir une meilleure classification en augmentant l'inertie totale du nuage
C) d'obtenir une meilleure classification en augmentant l'inertie expliquée par la classification

**Combiner AFC (ou ACM) et CAH permet**

D) d'homogénéiser les données, et de maximiser l'inertie expliquée
E) de classer des données qualitatives avec des méthodes nécessitant un espace euclidien (par exemple stratégie de limitation des pertes d'inertie lors des regroupements)

SAS au capital de 96 550 euros - Déclaration d'activité enregistrée sous le n° 11 75 44451 75 auprès du Préfet de Région IDF
4, rue Chauveau-Lagarde - 75008 Paris - Tél : 01 44 51 72 79 - Fax : 01 44 51 72 73
Email : formation@institutdesactuaires.fr
Siret : 512 264 441 000 19 - Code NAF : 8559 A - TVA intracommunautaire : FR 25 512264441 - RCS Paris : 512 264 441

# Mathématiques et probabilités

**Q 1** On note $\Omega$ l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire, et $A_1, A_2, A_3, A_4$ les parties de $\Omega$ associées à quatre événements aléatoires liés à cette expérience.
Le premier de ces quatre événements est une conséquence du deuxième, mais il est possible qu'il se réalise sans que ce dernier soit réalisé. Le troisième événement et le quatrième événement sont incompatibles, aucun des deux n'est impossible, et chacun des deux entraîne l'événement associé à $A_2$.

A) $A_1 \subset A_2$.

B) $A_2 \subset A_1$.

C) $A_3 \cup A_4 = \emptyset$.

D) $A_3 \cup A_4 \subset A_2$.

E) $A_3 \cup A_4 \subset A_1$.

**Q 2** On considère quatre variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, X_2, X_3, X_4$ qui suivent chacune la loi de Bernoulli de paramètre $1/3$.

A) Les variables aléatoires $X_1 + X_2$ et $X_3 + X_4$ sont indépendantes.

B) Les variables aléatoires $X_1 + X_2$ et $X_2 + X_4$ sont indépendantes.

C) Les variables aléatoires $X_1 + X_2$ et $X_2 + X_4$ suivent la même loi.

On pose $S = X_1 + 2X_2 + X_3$.

D) $S$ suit une loi binomiale.

E) $S$ suit la même loi que $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

**Q 3** On considère trois événements aléatoires $A$, $B$ et $C$, tels que :

$$\begin{cases} A \cap B \subset C \subset B \\ P(A) = 1/2 \\ P(B) = 1/2 \\ P(A \cap B) = 1/8 \\ P(C) = 1/4 \end{cases}.$$

A) $A$ et $C$ sont incompatibles.

B) L'événement $A \cup B$ est certain.

C) $P(A \cup B \cup C) = 3/4$.

D) $P(A \cup B \cup C) = 7/8$.

E) La probabilité conditionnelle de $B$ sachant $A$ est égale à la probabilité conditionnelle de $C$ sachant $B$.

**Q 4** Soit $X$ une variable aléatoire normale d'espérance et de variance égales à 4. On admettra que, si $Z$ suit une loi normale centrée réduite, alors

$$P[\,|Z| \leq 2\,] = 0,95$$

(il ne s'agit que d'une valeur approchée, mais on pourra l'utiliser pour répondre aux questions suivantes).

A) $P[\,X \geq 0\,] = 0,5$

B) $P[\,X \geq 0\,] = 0,95$

C) $P[\,X \geq 0\,] > 0,95$

D) $P[\,X \geq 6\,] \geq 0,025$

E) $P[\,X \geq 6\,] \leq 0,025$

**Q 5** Si $X_1, X_2, \ldots$ sont indépendantes et suivent chacune la loi normale centrée réduite, alors :

A) $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|$ suit une loi binomiale.

B) $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|$ suit une loi normale

C) $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|$ suit une loi du khi-deux

D) $P\big(\,|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n| \leq n^2\big)$ tend vers 1 quand $n$ tend vers l'infini.

E) $P\big(\,|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n| \leq n^2\big)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini.

**Q 6** Soit $X$ une variable aléatoire dont la fonction de répartition $F$ est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \mathrm{e}^{-(x-2)/2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases} .$$

A) $P([X = 2]) = 1$ .

B) $X$ est une variable aléatoire discrète.

C) $X + 2$ suit une loi exponentielle.

D) La variance de $X$ est égale à 4.

E) La variance de $X$ est égale à $1/4$.

**Q 7** Dans une urne contenant initialement 2 boules blanches et 3 boules rouges, on effectue un tirage sans remise, puis deux tirages avec remises.
Pour $n = 1, 2,$ ou $3$, on note $B_n$ (respectivement $R_n$) l'événement aléatoire « la $n$-ième boule tirée est blanche (respectivement rouge) ».

A) $P(B_1 \cap R_2) = P(B_2 \cap R_1)$.

B) $P(B_1) = P(B_2)$.

C) La probabilité conditionnelle de $B_1$ sachant $B_2$ est égale à $1/3$.

D) La probabilité conditionnelle de $R_1$ sachant $B_2$ est égale à $2/3$.

E) Les événements $B_2$ et $B_3$ sont indépendants.

**Q 8** (suite de la question précédente)

Pour $n = 1, 2,$ ou $3$, on note $X_n$ la variable indicatrice de l'événement $B_n$, qui vaut 1 si la $n$-ième boule tirée est blanche (respectivement rouge), 0 sinon. De même, on note $Y_n$ la variable indicatrice de l'événement $R_n$.

A) $X_n + Y_n = 1$.

B) $X_1$ et $X_2$ suivent la même loi de Bernoulli.

C) La covariance de $X_1$ et $X_2$ est nulle.

D) La covariance de $Y_2$ et $Y_3$ est nulle.

E) $E(X_1X_2X_3 + Y_1Y_2Y_3) = 1$.

**Q 9** On effectue une suite de tirages à pile ou face. La pièce utilisée est équilibrée et les tirages indépendants.
On note $T_1$ (respectivement $T_2$) le nombre de tirages nécessaires pour obtenir Pile pour la première fois (respectivement la deuxième fois) et $S$ le nombre de tirages nécessaires pour obtenir Pile deux fois de suite.
Pour tout entier $n \geq 2$, on note $p_n = P[S = n]$.

A) $T_1$ suit une loi géométrique.

B) $T_2 - 1$ suit une loi géométrique.

C) $T_2 - T_1$ suit une loi géométrique.

D) $[S = n + 1] = [T_1 = n] \cap [T_2 = n + 1]$.

E) $p_{n+2} = \dfrac{1}{2} p_{n+1} + \dfrac{1}{4} p_n$.

**Q 10** Soit $X$ une variable aléatoire dont une densité est la fonction $f$ donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{si } |x| \leq 1 \text{ ou si } 2 \leq |x| \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

A) $c = 1$ .

B) L'espérance de $E(X)$ est nulle.

C) L'écart-type de $X$ est nul.

D) L'écart-type de $X$ est égal à $3/2$.

E) L'écart-type de $X$ est égal à 3.

**Q 11** On considère deux variables aléatoires indépendantes $X$ et $Y$, telles que $X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et $Y$ la loi de Poisson de paramètre 1.

On note $S = X + Y$ et $g_S$ la fonction génératrice de $S$, définie par : $g_S(t) = E(t^S)$.

A) $S$ suit une loi binomiale .

B) $S$ suit une loi de Poisson .

C) $P([S = 0]) = \dfrac{1}{2} P([S = 1])$ .

D) $g_S(t) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}(1 + t)\,\mathrm{e}^t$ .

D) $g_S(t) = \dfrac{1}{2}(1 + t)\,\mathrm{e}^t$ .

**Q 12** Dans cette question et la suivante, on considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$ telles que :

$$\begin{cases} E(X) = 1 \\ E(Y) = -1 \\ E(X^2) = E(Y^2) = 5 \\ E(XY) = 0 \end{cases} .$$

On note $M$ la matrice de variance-covariance du vecteur $(X, Y)$, c'est-à-dire la matrice carrée :

$$M = \begin{pmatrix} V(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(Y,X) & V(Y) \end{pmatrix} .$$

A) $X$ et $Y$ sont indépendantes.

B) $X$ et $Y$ sont non-corrélées.

C) La matrice $M$ est inversible.

D) $M$ possède deux valeurs propres distinctes.

E) $M$ ne possède qu'une seule valeur propre.

**Q 13** (suite de la question précédente).

On considère deux variables aléatoires $U$ et $V$, normales, centrées, réduites, et indépendantes.

On note : $\begin{cases} X' = 2U \\ Y' = \dfrac{U + V\sqrt{15}}{2} \end{cases}$ .

A) $X'$ suit la même loi que $X + Y$.

B) $(X', Y')$ suit la même loi que $(X, Y)$.

C) $(X', Y')$ a la même matrice de variance-covariance que $(X, Y)$ (notée $M$ en question Q 12).

D) Il existe une matrice inversible $Q$ telle que $Q\,M\,Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

E) Il existe une matrice inversible $Q$ telle que $Q\,M\,{}^tQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Q 14** On considère des variables aléatoires mutuellement indépendantes $N, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ telles que $N$ suit la loi de Poisson de paramètre 1 et chacune des variables $X_n$ $(n \geq 1)$ la loi exponentielle de paramètre 1.

On note $C$ la variable aléatoire définie par : $C = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} X_n & \text{si } N \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

A) $P[C = 0] = 0$

B) $P[C = 0] = P[X_1 \geq 1]$

C) $P[C = 1] = 0$

D) $E(C) = 1$

E) $V(C) = 1$

SAS au capital de 96 550 euros - Déclaration d'activité enregistrée sous le n° 11 75 44451 75 auprès du Préfet de Région IDF
4, rue Chauveau-Lagarde - 75008 Paris - Tél : 01 44 51 72 79 - Fax : 01 44 51 72 73
Email : formation@institutdesactuaires.fr
Siret : 512 264 441 000 19 - Code NAF : 8559 A - TVA intracommunautaire : FR 25 512264441 - RCS Paris : 512 264 441